

3. Kvantifikované výroky

KVANTIFIKÁTORY - slova vyjadřující údaj o počtu prvků a danou vlastnost

- OBEČNÉ (nm. $\forall$): vyj., že KAŽDÝ (ŽÁDNÝ) uvaz. objekt MÁ (NEMÁ)

danou vlastnost

- např.: každý, někdo, libovolný, kterýkoliv (má);
žádný, nikdo, nic (nemá)

- EXISTENČNÍ (nm. $\exists$): vyj., že ASPOŇ JEDEN objekt MÁ (NEMÁ)

danou vlastnost

- např.: aspoň jeden [jeden nebo více], někdo, tu malá, existuje, ...

- JEDNOZNAČNÉ EXISTENCE (nm. $\exists!$): vyj., že EXISTUJE PŘÁVĚ JEDEN

(jediný) objekt s danou vlastností $\exists! x \in R: \neg \exists x = 0$

- JINÉ TYPY: NEJVÝŠE JEDEN (jeden nebo žádný) ASPOŇ m (m nebo více)
NEJVÝŠE m (m nebo méně) PŘÁVĚ m

KVANTIFIKOVANÉ VÝROKY - výroky obsahující kvantifikátory

- OBEČNÝ VÝROK: obsahuje obecní kvantifikátor

(př.) Každý člověk je smyslem svého slova.

Žádná kosa se nepohybuje tak rychle.

$\forall n \in \mathbb{N}: n > 0$ $\forall a \in \mathbb{R}: \sqrt{a^2} = |a|$ $\forall a \in \mathbb{R}: \sqrt{a^2} \geq 0$

- EXISTENČNÍ VÝROK: obsahuje existenční kvantifikátor

(př.) aspoň jedno prvočíslo je sudé. $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = 4$

[pokud více kvantifikátorů $\Rightarrow$ typ podle prvního kvantifikátoru - název má pořadí]

(př.) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: x < y$... OBEČNÝ výrok pravdivý

$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: x < y$... EXISTENČNÍ výrok nepravdivý

- JINÉ TYPY

(př.) Účinná má právě 2 body společné s kružnicí. Nejvýše 4 strany bude přímé.
Aspoň 3 strany jsou rovnoběžné.

NEGOVÁNÍ KVANTIFIKOVANÝCH VÝROKŮ

- OBEČNÝCH A EXISTENČNÍCH (zaměním kvantifikátorů a negujeme vlastnost)

(př.) a: Každý student se učí. $\neg a$: Existuje aspoň jeden student, který se neučí.

b: Žádný student se neučí. $\neg b$: Existuje aspoň jeden student, který se učí.

c: Aspoň jeden student se učí. $\neg c$: Žádný student se neučí.

d: Aspoň jeden student se neučí. $\neg d$: Každý student se učí. (všechni)

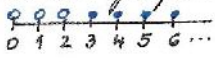
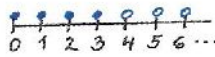
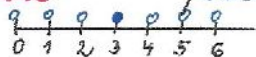
VÝROK (negace) $\longleftrightarrow$ NEGACE VÝROKU (výrok) studenti se učí.

KAŽDÝ (někdo) ... JE (jsou) ... EXISTUJE ASPOŇ JEDEN ... kteří NENÍ ...

ASPOŇ JEDEN ... JE ... ŽÁDNÝ ... NENÍ ...

[symbolicky a: $\forall x \in U: V(x)$ b: $\exists x \in U; V(x)$
 $\neg a$: $\exists x \in U: \neg V(x)$ $\neg b$: $\forall x \in U; \neg V(x)$]

- JINÝCH (často je vhodné si pomáhat graficky)

- (př.) a: Aspoň 3 tam přišli. ≥ 3  1a: Nanejvýš 2 tam přišli. ≤ 2
- b: Nanejvýš 3 tam nepřišli. ≤ 3  1b: Aspoň 4 tam nepřišli. ≥ 4
- c: Převš 3 tam přišli.  1c: Převš 3 tam nepřišli.
[NEBO Nanejvýš 2 tam přišli nebo aspoň 4 tam přišli.]

VÝROK $\longrightarrow$ NEGACE VÝROKU

- ASPOŇ $n \dots$ JE (MNOŽ) $\dots$ NEJVÝŠE $n-1 \dots$ JE (MNOŽ) $\dots$
- NEJVÝŠE $n \dots$ JE (MNOŽ) $\dots$ ASPOŇ $n+1 \dots$ JE (MNOŽ) $\dots$
- PŘEVŠ $n \dots$ JE (MNOŽ) $\dots$ PŘEVŠ $n \dots$ NENÍ (J) $\dots$
[NEJVÝŠE $n-1 \dots$ JE (MNOŽ) $\dots$ NEBO ASPOŇ $n+1 \dots$ JE (MNOŽ) $\dots$]

- SLOŽENÝCH (zaměněním kvantifikátorů a negujme složený výrok)

- (př.) a: $\forall x \in U; V(x) \wedge Q(x)$ 1a: $\exists x \in U; \neg V(x) \vee \neg Q(x)$
- b: $\exists x \in U; V(x) \Rightarrow Q(x)$ 1b: $\forall x \in U; V(x) \wedge \neg Q(x)$ abs.

- VÍCE KVANTIFIKÁTORŮ

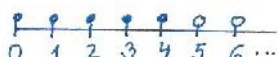
- (př.) a: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \exists x \in \mathbb{R}; ax^2 + bx + c = 0$ 1a: $\exists a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}; ax^2 + bx + c \neq 0$
- [; : čemu pro která platí, kč]

Příklady

① Neguj!

- a: Každý Δ je pravoúhlý. 1a: Existují alespoň jeden Δ , který není pravoúhlý.
- b: Některé přirozené číslo není sudé. 1b: Existují aspoň jedno přirozené číslo, které je sudé. (aspoň 1 přirozené číslo je sudé.)
- c: Aspoň jedno přirozené číslo je dělitelné 2. 1c: Některé přirozené číslo není dělitelné 2.
- d: Aspoň jeden člověk mlčí. 1d: Každý člověk mluví. Všichni lidé mluví.
- e: Aspoň jeden člověk je neschůdný. 1e: Každý člověk není neschůdný, tj. je schůdný. Všichni lidé jsou schůdní.
- f: $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 = -2$ 1f: $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \neq -2$
- g: $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0$ 1g: $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0$

② Neguj!

- a: Aspoň 3 okna jsou otevřená.  1a: Nanejvýš 2 okna jsou otevřená.
- b: Nanejvýš 4 studovni se mlučí.  1b: Aspoň 5 studovni se mlučí.
- c: Množina má právě 4 prvky.  1c: Množina nemá právě 4 prvky. [množina má nejvýš 3 nebo alespoň 5 prvků.]

③ Negujte:

- 4.22 a: Nic morího pod sluncem. 1a: Aspoň něco (jídla/věc) je pod sluncem/morí. (morí)
 b: Ben práce nejsou hotové. 1b: Aspoň jeden hotový je Ben práce.
 c: Každý učení v mluvi nespadne. 1c: Aspoň jeden učení v mluvi spadne.
 d: Kdo jinému jámu kopá, sám do ní spadne. 1d: Aspoň jeden (člověk), který kopá jámu jinému, do ní nespadne.

④ Rozhodněte o pravdivosti a negujte (ben považuje mluvi pravdy kř... - i v dalších př.).

- 4.23 a: Úhloměřky každého čtyřúhelníka jsou rovněž rovinné.
 1a: Existuje aspoň jeden čtyřúhelník, jehož úhloměřky nejsou rovněž rovinné.
 b: Každé celé číslo je racionální.
 1b: Existuje alespoň jedno celé číslo, které není racionální.
 c: Existují Δ , ve kterých součet všech jeho vnitřních úhlů není roven 180° .
 1c: V každém Δ je součet všech jeho vnitřních úhlů roven 180° .
 d: Existuje aspoň jedno reálné číslo, jehož součin s nulou je číslo nenulové.
 1d: Pro každé reálné číslo je jeho součin s nulou roven číslu nula. (součin každého reálného čísla a nuly je roven nule.)

⑤ Negujte předpoklady

- 4.4 a: Existuje aspoň jedno reálné číslo x , pro něž $\sqrt{x^2} = x$. $[\exists x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2} = x]$
 1a: Pro každé reálné číslo x platí, že $\sqrt{x^2} \neq x$. $[\forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2} \neq x]$
 b: Pro všechna reálná čísla $x > 1$ platí $\sqrt{x^2} > x$. $[\forall x \in \mathbb{R}; x > 1: \sqrt{x^2} > x]$
 1b: Existuje aspoň jedno reálné číslo $x > 1$, pro něž $\sqrt{x^2} \leq x$. $[\exists x \in \mathbb{R}; x > 1: \sqrt{x^2} \leq x]$
 c: Každé přirozené číslo, které je dělitelné 10, je dělitelné 5.
 1c: Existuje aspoň jedno přirozené číslo dělitelné 10, které není dělitelné 5.
 d: Každé přirozené číslo není menší než -10.
 1d: Alespoň jedno přirozené číslo je menší než -10.

⑥ Negujte

- 4.5 a: Na roklech vde aspoň 300 schodů. b: Knihy má nejvýše 100 stránek.
 1a: Na roklech vde nejvýše 299 schodů. 1b: Kniha má aspoň 201 stránek.
 c: Průměr menších než 100 je nejvýše 25. d: Brojci jsou čísla je 90.
 1c: Průměr menších než 100 je aspoň 26. 1d: Brojci jsou čísla není 90.

⑦ Negujte

- a: ČR má více než 10 milionů obyvatel.
 1a: ČR má nejvýše 10 milionů obyvatel.
 b: Praha má méně než 1,5 milionů obyvatel.
 1b: Praha má aspoň 1,5 milionů obyvatel.
 c: Poloměr Země není menší než 6000 km.
 1c: Poloměr Země je menší než 6000 km.
 d: Vzdálenost Měsíce od Země není větší než 400 000 km.
 1d: Vzdálenost Měsíce od Země je větší než 400 000 km.
 e: Rychlost světla ve vakuu je 300 000 km.s⁻¹.
 1e: Rychlost světla ve vakuu není 300 000 km.s⁻¹.